CONCOURS TA A EPREUVES COMMUNES

CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE
ISIMA - ENSAM - ENS CACHAN -
ENSAIS B - ENSAIT - ENSIETA - ESIM - ISEP - ITECH

Epreuve de

MATHEMATIQUES 2

Durée : 4 heures

Soit $\boldsymbol{R}$ le corps des nombres réels et $\boldsymbol{C}$ celui des nombres complexes.

On note $\mathcal{M}_{2,2}(\boldsymbol{C})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients complexes.

α étant un complexe, on note $\overline{\alpha}$ son conjugué.

On désigne par $\boldsymbol{E}$ l'espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3, rapporté à une base orthonormale directe $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

On note $\left\|\vec{V}\right\|$ la norme euclidienne d'un vecteur $\vec{V}$ de $\boldsymbol{E}$.

Partie I

On considère le sous ensemble $\mathcal{M}$ de $\mathcal{M}_{2,2}(\boldsymbol{C})$ constitué des matrices M qui s'écrivent sous la forme :

$M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix}$ où α et β sont deux nombres complexes arbitraires.

I.1. Structure d'anneau.

I.1.a. Montrer que les restrictions à $\mathcal{M}$ de l'addition et de la multiplication matricielles confèrent à $\mathcal{M}$ une structure d'anneau.

I.1.b. A tout $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}$, on associe $\tilde{M} = \begin{pmatrix} \overline{\alpha} & -\beta \\ +\overline{\beta} & \alpha \end{pmatrix}$.

Montrer que $\tilde{M} \in \mathcal{M}$.

Calculer $\tilde{M} \cdot M$ et $M \cdot \tilde{M}$.

I.1.c. Soient M_1 et M_2 deux éléments de $\mathcal{M}$. Exprimer $\widetilde{M_1 \cdot M_2}$ en fonction de $\tilde{M}_1$ et $\tilde{M}_2$.

I.2. Structure d'espace vectoriel.

I.2.a. Montrer que $\mathcal{M}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{2,2}(C)$ considéré comme espace vectoriel réel.

I.2.b. Soit une matrice $M=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha}\end{pmatrix}$, élément de $\mathcal{M}$, où $\alpha=a+ib$ et $\beta=c+id$, (a, b, c, d, réels). Montrer que l'on peut écrire M sous la forme $M=aB_1+bB_2+cB_3+dB_4$ où B_1, B_2, B_3 et B_4 sont quatre matrices de $\mathcal{M}$ que l'on précisera.

I.2.c. Trouver une base de cet espace vectoriel réel.

I.3. Structure de corps.

On désigne par $\mathcal{M}^*$ l'ensemble $\mathcal{M}$ privé de l'élément nul de $\mathcal{M}_{2,2}(C)$.

I.3.a. Montrer que tout élément M de $\mathcal{M}^*$ admet un inverse M^{-1} dans $\mathcal{M}^*$ pour la multiplication matricielle.

I.3.b. Exprimer M^{-1} à l'aide de $\tilde{M}$.

I.4. Morphismes et sous-algèbres.

I.4.a. Soit l'application Φ de C dans $\mathcal{M}$ qui associe à tout nombre complexe α la matrice $\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \overline{\alpha}\end{pmatrix}$.

Montrer les propriétés suivantes :

$$\forall(\lambda,\alpha,\alpha_1,\alpha_2)\in R\times C^3\begin{cases}\Phi(\alpha_1+\alpha_2)=\Phi(\alpha_1)+\Phi(\alpha_2)\\ \Phi(\alpha_1\cdot\alpha_2)=\Phi(\alpha_1)\cdot\Phi(\alpha_2)\\ \Phi(\lambda\cdot\alpha)=\lambda\cdot\Phi(\alpha)\end{cases}$$

I.4.b. Soit l'application φ de $\boldsymbol{R}$ dans $\mathcal{M}$ qui associe à tout nombre réel a la matrice $\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a\end{pmatrix}$.

Montrer les propriétés suivantes :

$$\forall(\lambda,a,a_1,a_2)\in R^4\begin{cases}\varphi(a_1+a_2)=\varphi(a_1)+\varphi(a_2)\\ \varphi(a_1\cdot a_2)=\varphi(a_1)\cdot\varphi(a_2)\\ \varphi(\lambda\cdot a)=\lambda\cdot\varphi(a)\end{cases}$$

Partie II

Dans l'ensemble produit $\Gamma = R \times E$ où les éléments q sont notés $(t, \vec{V})$, on définit les opérations suivantes :

L'addition de 2 éléments de Γ :

$$q_1 + q_2 = (t_1, \vec{V}_1) + (t_2, \vec{V}_2) = (t_1 + t_2, \vec{V}_1 + \vec{V}_2).$$

La multiplication d'un élément de Γ par un réel λ :

$$\lambda \cdot q = \lambda \cdot (t, \vec{V}) = (\lambda t, \lambda \vec{V}).$$

La multiplication de deux éléments de Γ :

$$q_1 \times q_2 = (t_1, \vec{V}_1) \times (t_2, \vec{V}_2) = (t_1 \cdot t_2 - \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2, \quad t_2 \vec{V}_1 + t_1 \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2)$$

où $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$ (respectivement $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$) désigne le produit scalaire (respectivement le produit vectoriel) des vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$.

II.1. Structure d'espace vectoriel.

Montrer que Γ muni des deux premières opérations ci-dessus est un espace vectoriel sur R.

II.2. Structure d'anneau.

II.2.a. A la matrice $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$, dans laquelle $\alpha = a + ib$ et $\beta = c + id$, on fait correspondre le couple de Γ : $(a, b\vec{e}_1 + c\vec{e}_2 + d\vec{e}_3)$.

Montrer que l'on définit ainsi une application Ψ de $\mathcal{M}$ dans Γ possédant les propriétés suivantes :

Ψ est une bijection de $\mathcal{M}$ sur Γ

pour tout couple (M_1, M_2) d'éléments de $\mathcal{M}$, on a : $\Psi(M_1 \cdot M_2) = \Psi(M_1) \times \Psi(M_2)$.

II.2 .b. Déduire de ce qui précède que Γ, muni des opérations d'addition et de multiplication, est un anneau dont on précisera l'élément unité.

II.2 .c. Cet anneau est-il commutatif ?

II.3. Structure de groupe multiplicatif.

Soit Γ^* l'ensemble Γ privé de l'élément nul $(0, \vec{0})$.

II.3.a. Soit $q = (t, \vec{V})$ un élément de Γ, on pose $\tilde{q} = (t, -\vec{V})$. Montrer que $\tilde{q} \times q$ est un élément de $R \times \{\vec{0}\}$.

II.3.b. En déduire que tout élément de Γ^* admet un inverse relativement à la multiplication de Γ.

II.3.c. Prouver que Γ^*, muni de la multiplication de Γ, est un groupe.

Partie III

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des éléments de Γ qui vérifient $t^2 + \left\|\vec{V}\right\|^2 = 1$, et S l'ensemble des vecteurs $\vec{V}$ qui vérifient $\left\|\vec{V}\right\| = 1$.

III.1. Montrer que $\mathcal{S}$ est un sous groupe du groupe multiplicatif $(\Gamma^*, \times)$.

III.2. Montrer que $\forall\, q \in \mathcal{S}, \exists\, \theta \in R$ et $\exists\, \vec{W} \in S$ tels que $q = (cos\theta,\ sin\theta\, \vec{W})$.

III.3. Soit q un élément de $\mathcal{S}$, on lui associe l'application ρ définie par :

$$\Gamma \xrightarrow{\rho} \Gamma$$
$$r \to q \times r \times q^{-1}$$

Montrer que ρ est stable dans $\{0\} \times \boldsymbol{E}$. On définit $\hat{\rho}$, application de $\boldsymbol{E}$ dans lui même, par $\rho((0,\vec{V})) = (0,\hat{\rho}(\vec{V}))$.

III.4. Soit q un élément de $\mathcal{S}$ défini par $q = (cos\theta, sin\theta\, \vec{W})$ où $\left\|\vec{W}\right\| = 1$ auquel on associe $\hat{\rho}$ comme il a été dit précédemment.

III.4.a. Montrer que $\vec{W}$ est un invariant de $\hat{\rho}$.

III.4.b. Soit $\vec{V}$ un vecteur orthogonal à $\vec{W}$, exprimer $\hat{\rho}(\vec{V})$ à l'aide de $\vec{V}$ et de $\vec{W} \wedge \vec{V}$.

III.4.c. En déduire que $\hat{\rho}$ est la rotation d'axe $\vec{W}$ et d'angle 2θ.

III.5. On note $\mathcal{R}(\vec{W}, \theta)$ la rotation d'axe $\vec{W}$ et d'angle θ. Utiliser les résultats précédents pour déterminer le produit $\mathcal{R}(\vec{e_3}, \theta) \circ \mathcal{R}(\vec{e_2}, \theta) \circ \mathcal{R}(\vec{e_1}, \theta)$.